Dans ce problème la notation ln désigne le logarithme népérien; les candidats pourront, s'ils le désirent, utiliser la notation Log.

I On envisage la suite (K) définie par :

$$K_p = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin^p x \, dx$$

I.1. Montrer que cette suite est monotone.

I.2. Calculer K_0 et K_1.

I.3. Au moyen d'intégrations par parties démontrer la relation :

$$(p^2 + 1)\, K_p = p(p-1)\, K_{p-2} \qquad (p \geqslant 2)$$

et calculer K_{2q} en fonction de K_0 et q, K_{2q+1} en fonction de K_1 et q.

I.4. Mettre ln K_p sous la forme de la somme des p premiers termes d'une série numérique. Étudier cette série et en déduire la limite de K_p lorsque $p \to \infty$.

II On envisage maintenant la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin^p x \, dx \qquad (p \text{ fixe}, \ n \geqslant 0)$$

II.1. Exprimer u_n en fonction de K_p. En déduire la nature de cette série.

II.2. Soit σ_p sa somme. Exprimer σ_{2q} et σ_{2q+1} en fonction respectivement de K_{2q} et K_0, de K_{2q+1} et K_1.

III Montrer que l'intégrale :

$$I_p = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^p x \, dx$$

est absolument convergente.

Démontrer par un raisonnement précis que cette intégrale est égale à la somme de la série précédente. Quelle est sa limite lorsque $p \to \infty$?

IV On se propose d'étudier l'existence d'une limite pour le rapport $\frac{I_{p+1}}{I_p}$.

IV.1. On pose :

$$v_q = \frac{I_{2q+1}}{I_{2q}} \qquad w_q = \frac{I_{2q}}{I_{2q-1}}.$$

Le produit $v_q w_q$ a-t-il une limite?

IV.2. Montrer que la suite (v_q) est croissante et en déduire qu'elle admet une limite l vérifiant :

$$l \leqslant \frac{e^{\pi} - 1}{e^{\pi} + 1}$$

IV.3. Déterminer un majorant de w_q et en déduire les limites des suites (v_q) et (w_q).

Conclusion pour le rapport $\frac{I_{p+1}}{I_p}$?

V V.1. On envisage la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$. Quel est son rayon de convergence R? (On pourra considérer cette série comme une somme de deux séries.)

On se propose de rechercher si cette série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

V.2. $x = R$. Montrer que $\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} > \frac{n}{n+1}$.

Que peut-on déduire pour la limite lorsque $q \to \infty$ de $\sum_{n=0}^{n=q} I_{2n}$.

et pour la nature de la série entière?

V.3. $x = -R$. Donner un minorant du rapport $\frac{I_{2q} - I_{2q+1}}{I_{2q}}$.

(on utilisera un résultat du IV.) Et en déduire la nature de la série.

FIN